

Übungsaufgaben zur Vektorrechnung

W. Kippels

18. November 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgaben	3
1.1	Aufgabe 1	3
1.1.1	Aufgabe 1a	3
1.1.2	Aufgabe 1b	3
1.1.3	Aufgabe 1c	3
1.1.4	Aufgabe 1d	3
1.1.5	Aufgabe 1e	3
1.2	Aufgabe 2	3
1.3	Aufgabe 3	4
1.3.1	Aufgabe 3a	4
1.3.2	Aufgabe 3b	4
1.3.3	Aufgabe 3c	4
1.4	Aufgabe 4	4
1.4.1	Aufgabe 4a	4
1.4.2	Aufgabe 4b	4
1.5	Aufgabe 5	4
1.6	Aufgabe 6	5
1.7	Aufgabe 7	5
1.7.1	Aufgabe 7a	5
1.7.2	Aufgabe 7b	5
1.8	Aufgabe 8	5
1.9	Aufgabe 9	6
1.9.1	Aufgabe 9a	6
1.9.2	Aufgabe 9b	6
1.10	Aufgabe 10	6
1.11	Aufgabe 11	6
1.12	Aufgabe 12	6

2	Lösungen der Aufgaben	7
2.1	Aufgabe 1	7
2.1.1	Aufgabe 1a	7
2.1.2	Aufgabe 1b	7
2.1.3	Aufgabe 1c	8
2.1.4	Aufgabe 1d	8
2.1.5	Aufgabe 1e	9
2.2	Aufgabe 2	9
2.3	Aufgabe 3	10
2.3.1	Aufgabe 3a	10
2.3.2	Aufgabe 3b	10
2.3.3	Aufgabe 3c	10
2.4	Aufgabe 4	11
2.4.1	Aufgabe 4a	11
2.4.2	Aufgabe 4b	11
2.5	Aufgabe 5	12
2.6	Aufgabe 6	12
2.7	Aufgabe 7	13
2.7.1	Aufgabe 7a	13
2.7.2	Aufgabe 7b	14
2.8	Aufgabe 8	15
2.9	Aufgabe 9	17
2.9.1	Aufgabe 9a	17
2.9.2	Aufgabe 9b	18
2.10	Aufgabe 10	20
2.11	Aufgabe 11	21
2.12	Aufgabe 11	22

1 Aufgaben

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben. Die Lösungen befinden sich im nächsten Kapitel.

1.1 Aufgabe 1

Sind die Vektoren **linear abhängig** (Aufg. a und b) bzw. **komplanar** (Aufg. c bis e)?

1.1.1 Aufgabe 1a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Aufgabe 1b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Aufgabe 1c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

1.1.4 Aufgabe 1d

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.1.5 Aufgabe 1e

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.3 Aufgabe 3

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

1.3.1 Aufgabe 3a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Aufgabe 3b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Aufgabe 3c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.4 Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen!

1.4.1 Aufgabe 4a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Aufgabe 4b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.5 Aufgabe 5

Ordnen Sie die fünf Vektoren nach der Länge der zugehörigen Pfeile!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Beträge der vier Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

1.7 Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

1.7.1 Aufgabe 7a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}$$

1.7.2 Aufgabe 7b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1.8 Aufgabe 8

Bestimmen Sie die fehlende Komponente x so, dass sich ein Winkel von 60° zwischen den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} ergibt!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ \sqrt{50} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.9 Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Parameter x , y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen!

1.9.1 Aufgabe 9a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

1.9.2 Aufgabe 9b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix}$$

1.10 Aufgabe 10

Bestimmen Sie einen Vektor \vec{d} senkrecht zu \vec{a} und \vec{b} mit dem Betrag von \vec{c} !

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -23,5 \end{pmatrix}$$

1.11 Aufgabe 11

Gegeben sind drei Vektoren im \mathbb{R}^3 :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks zwischen den Endpunkten der Vektoren!

1.12 Aufgabe 12

Gegeben sind drei Vektoren im \mathbb{R}^2 :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks zwischen den Endpunkten der Vektoren!

2 Lösungen der Aufgaben

2.1 Aufgabe 1

2.1.1 Aufgabe 1a

Sind die Vektoren **linear abhängig**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante¹ $\det(\vec{a}, \vec{b})$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **linear abhängig**.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 0$$

Die Determinante ist Null. \Rightarrow **Die Vektoren sind linear abhängig.**

2.1.2 Aufgabe 1b

Sind die Vektoren **linear abhängig**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b})$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **linear abhängig**.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 2 \neq 0$$

Die Determinante ist **nicht** Null. \Rightarrow **Die Vektoren sind linear unabhängig.**

¹Alle Hintergrundinformationen zu Determinanten, was das ist und wie sie berechnet wird, ist hier zu finden: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/det.pdf>

2.1.3 Aufgabe 1c

Sind die Vektoren **komplanar**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **komplanar**.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -10 - 10 - 10 + 10 + 10 + 10 = 0$$

Die Determinante ist Null. \Rightarrow **Die Vektoren sind komplanar.**

2.1.4 Aufgabe 1d

Sind die Vektoren **komplanar**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **komplanar**.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{matrix} = 0 + 4 - 8 - 0 - 0 + 2 = -2 \neq 0$$

Die Determinante ist **nicht** Null. \Rightarrow **Die Vektoren sind nicht komplanar.**

2.1.5 Aufgabe 1e

Sind die Vektoren **komplanar**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **komplanar**.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \\ 1 \quad 1 \end{array} = -1 + 0 + 0 - 1 - 1 - 0 = -3 \neq 0$$

Die Determinante ist **nicht** Null. \Rightarrow **Die Vektoren sind nicht komplanar.**

2.2 Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\text{Vektoren } \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ komplanar} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 0 \\ \begin{vmatrix} a & -5 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} a \quad -5 \\ 2 \quad 0 \\ 0 \quad 3 \end{array} &= 0 \\ 0 + 0 + 30 - 0 - 12a + 30 &= 0 \\ -12a + 60 &= 0 \quad | -60 \\ -12a &= -60 \quad | :(-12) \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Der fehlende Parameter ist: **$a = 5$**

2.3 Aufgabe 3

2.3.1 Aufgabe 3a

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 \neq 0$$

Die Vektoren sind **nicht** orthogonal.

2.3.2 Aufgabe 3b

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) = 0$$

Die Vektoren sind orthogonal.

2.3.3 Aufgabe 3c

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = -10 + 12 - 2 = 0$$

Die Vektoren sind orthogonal.

2.4 Aufgabe 4

2.4.1 Aufgabe 4a

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix} &= 0 \\ -4 + x + 15 &= 0 \\ x + 11 &= 0 \quad | -11 \\ x &= -11 \end{aligned}$$

Der fehlende Parameter lautet: $x = 11$

2.4.2 Aufgabe 4b

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} &= 0 \\ 5x + 0 + 0 &= 0 \\ 5x &= 0 \quad | :5 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Der fehlende Parameter lautet: $x = 0$

2.5 Aufgabe 5

Ordnen Sie die fünf Vektoren nach der Länge der zugehörigen Pfeile!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Länge des Pfeiles entspricht dem Betrag des Vektors. Daher bestimme ich zunächst die Beträge der Vektoren.

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \\ |\vec{b}| &= \sqrt{6^2 + (-9)^2} = \sqrt{117} \approx 10,82 \\ |\vec{c}| &= \sqrt{2^2 + (-8)^2 + 10^2} = \sqrt{168} \approx 12,96 \\ |\vec{d}| &= \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 11^2} = \sqrt{179} \approx 13,38 \\ |\vec{e}| &= \sqrt{7^2 + (-7)^2 + 7^2} = \sqrt{147} \approx 12,12 \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Werte – am besten der exakten mit Wurzel – ergibt sich folgende Reihenfolge:

$$\vec{b} \quad \vec{e} \quad \vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{d}$$

2.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Beträge der vier Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13 \\ |\vec{b}| &= \sqrt{(-21)^2 + (-28)^2} = \sqrt{1225} = 35 \\ |\vec{c}| &= \sqrt{(-12)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{169} = 13 \\ |\vec{d}| &= \sqrt{15^2 + (-16)^2 + 12^2} = \sqrt{625} = 25 \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = 13 \quad |\vec{b}| = 35 \quad |\vec{c}| = 13 \quad |\vec{d}| = 25$$

2.7 Aufgabe 7

2.7.1 Aufgabe 7a

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zur Lösung dient die Grundformel: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle \vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle \vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$$

$$\cos \angle \vec{a}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\angle \vec{a}\vec{b} = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\angle \vec{a}\vec{b} = \arccos \frac{\begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{(-21)^2 + (-28)^2}}$$

$$\angle \vec{a}\vec{b} = \arccos \frac{105 + 336}{13 \cdot 35}$$

$$\angle \vec{a}\vec{b} = \arccos \frac{441}{455}$$

$$\angle \vec{a}\vec{b} \approx 14,25^\circ$$

Der Winkel zwischen den Vektoren ist: $\angle \vec{a}\vec{b} \approx 14,25^\circ$

2.7.2 Aufgabe 7b

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zur Lösung dient die umgestellte Grundformel: $\angle \vec{a}\vec{b} = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$$\angle \vec{a}\vec{b} = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\angle \vec{a}\vec{b} = \arccos \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-9)^2 + (-12)^2 + 36^2} \cdot \sqrt{24^2 + (-6)^2 + 8^2}}$$

$$\angle \vec{a}\vec{b} = \arccos \frac{-216 + 72 + 288}{39 \cdot 26}$$

$$\angle \vec{a}\vec{b} = \arccos \frac{144}{1014}$$

$$\angle \vec{a}\vec{b} \approx 81,8357^\circ$$

Der Winkel zwischen den Vektoren ist: $\angle \vec{a}\vec{b} \approx 81,8357^\circ$

2.8 Aufgabe 8

Bestimmen Sie die fehlende Komponente x so, dass sich ein Winkel von 60° zwischen den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} ergibt!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ \sqrt{50} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zur Lösung dient die Grundformel: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle \vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle \vec{a}\vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|) \\ \sqrt{(-7)^2 + 1^2 + (\sqrt{50})^2} \cdot \sqrt{x^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \cos 60^\circ &= \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ \sqrt{50} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 10 \cdot \sqrt{x^2 + 16} \cdot 0,5 &= -7x + 4 \quad | ()^2 \\ 5 \cdot \sqrt{x^2 + 16} &= -7x + 4 \quad | ()^2 \\ 25 \cdot (x^2 + 16) &= 49x^2 - 56x + 16 \\ 25x^2 + 400 &= 49x^2 - 56x + 16 \\ -24x^2 + 56x + 384 &= 0 \quad | : (-24) \\ x^2 - \frac{7}{3}x - 16 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{576}{36}} \\ x_{1/2} &= \frac{7}{6} \pm \frac{25}{6} \\ x_1 = \frac{16}{3} & \quad x_2 = -3 \end{aligned}$$

Im Verlauf der Lösung entstand eine **Wurzelgleichung**, die gelöst werden musste. Bekanntlich können dabei Pseudo-Lösungen entstehen, die aber die ursprüngliche Gleichung nicht erfüllen. Eine **Probe** mit beiden gefundenen Lösungskandidaten ist also unumgänglich.

Probe mit $x_1 = \frac{16}{3}$:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \sqrt{x_1^2 + 16} &\stackrel{?}{=} -7x_1 + 4 \\ 5 \cdot \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16} &\stackrel{?}{=} -7 \cdot \frac{16}{3} + 4 \\ 5 \cdot \frac{20}{3} &\stackrel{?}{=} -\frac{112}{3} + \frac{12}{3} \\ \frac{100}{3} &\neq -\frac{100}{3} \end{aligned}$$

Probe mit $x_2 = -3$:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \sqrt{x_2^2 + 16} & \stackrel{?}{=} -7x_2 + 4 \\ 5 \cdot \sqrt{(-3)^2 + 16} & \stackrel{?}{=} -7 \cdot (-3) + 4 \\ 5 \cdot 5 & \stackrel{?}{=} 21 + 4 \\ 25 & = 25 \end{aligned}$$

Es gibt also nur eine Lösung, nämlich: $x_2 = -3$

2.9 Aufgabe 9

2.9.1 Aufgabe 9a

Bestimmen Sie die Parameter x , y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung: Um drei Parameter zu bestimmen, benötigen wir drei Gleichungen. Diese erhalten wir durch die Bedingung des paarweisen Senkrechtstehens.

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ (2) \quad \vec{a} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ (3) \quad \vec{b} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{aligned}$$

Die konkreten Werte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{l} (1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ (2) \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ (3) \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \hline (1) \quad \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \\ (2) \quad \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (3) \quad \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ \hline (1) \quad -3x - 25y + 12 = 0 \\ (2) \quad 4x - 25 - 3z = 0 \\ (3) \quad -12 + y - 4z = 0 \\ \hline (1) \quad -3x - 25y = -12 \\ (2) \quad 4x - 3z = 25 \\ (3) \quad +y - 4z = 12 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden.² Man erhält die Lösungen: $x = 4 \quad y = 0 \quad z = -3$

²Weitere Informationen zu möglichen Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme sind hier zu finden: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf>

2.9.2 Aufgabe 9b

Bestimmen Sie die Parameter x , y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung: Um drei Parameter zu bestimmen, benötigen wir drei Gleichungen. Diese erhalten wir durch die Bedingung des paarweisen Senkrechtstehens.

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ (2) \quad \vec{a} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ (3) \quad \vec{b} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{aligned}$$

Die konkreten Werte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{r} (1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ (2) \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ (3) \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \\ \hline (1) \quad \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \\ (2) \quad \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (3) \quad \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ \hline (1) \quad xy - 11 - 9 = 0 \\ (2) \quad 15x - 198 + 3z = 0 \\ (3) \quad 15y + 18 - 3z = 0 \\ \hline (1) \quad xy = 20 \\ (2) \quad 15x + 3z = 198 \\ (3) \quad 15y - 3z = -18 \end{array}$$

Da in Gleichung (1) das Produkt xy vorkommt, handelt es sich **nicht** um ein **lineares** Gleichungssystem. Einige Lösungsverfahren müssen daher entfallen. Daher verwende ich das **Einsetzungsverfahren**, denn das funktioniert immer. Ich löse Gleichung (3) nach z auf und setze das Ergebnis in Gleichung (2) ein. Gleichung (1) bleibt erhalten, da dort kein z vorkommt.

$$\begin{aligned} 15y - 3z &= -18 \quad | -15y \\ -3z &= -18 - 15y \quad | :(-3) \\ z &= 6 + 5y \end{aligned}$$

Eingesetzt in (2):

$$\begin{aligned}15x + 3 \cdot (6 + 5y) &= 198 \\15x + 18 + 15y &= 198 \quad | - 18 \\15x + 15y &= 180\end{aligned}$$

Jetzt stelle ich diese Gleichung nach y um und setze das Ergebnis in (1) ein.

$$\begin{aligned}15x + 15y &= 180 \quad | - 15x \\15y &= 180 - 15x \quad | : 15 \\y &= 12 - x\end{aligned}$$

Eingesetzt in (1):

$$\begin{aligned}xy &= 20 \\x \cdot (12 - x) &= 20 \\12x - x^2 &= 20 \quad | - 20 \\12x - x^2 - 20 &= 0 \quad | \cdot (-1) \\x^2 - 12x + 20 &= 0 \\x_{1/2} &= 6 \pm \sqrt{36 - 20} \\x_{1/2} &= 6 \pm 4 \\x_1 = 10 \quad x_2 &= 2\end{aligned}$$

Zu jedem x -Wert gibt es passende y - und z -Werte.

$$y_1 = 12 - x_1 = 12 - 10 = 2$$

$$y_2 = 12 - x_2 = 12 - 2 = 10$$

$$z_1 = 6 + 5y_1 = 6 + 5 \cdot 2 = 16$$

$$z_2 = 6 + 5y_2 = 6 + 5 \cdot 10 = 56$$

Lösungen: $x_1 = 10 \quad y_1 = 2 \quad z_1 = 16$ und $x_2 = 2 \quad y_2 = 10 \quad z_2 = 56$

2.10 Aufgabe 10

Bestimmen Sie einen Vektor \vec{d} senkrecht zu \vec{a} und \vec{b} mit dem Betrag von \vec{c} !

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -23,5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Einen beliebigen Vektor senkrecht zu \vec{a} und \vec{b} findet man leicht mit Hilfe des **Kreuzproduktes**. Da er (vermutlich) noch nicht die richtige Länge hat, nenne ich ihn nicht \vec{d} sondern \vec{e} .

$$\vec{e} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 9 - 4 \cdot (-5) \\ 4 \cdot (-4) - (-2) \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 47 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt wird der Betrag von \vec{c} und \vec{e} bestimmt.

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + (-11)^2 + (-23,5)^2} = \sqrt{552,25} \approx 23,5$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{22^2 + 47^2 + 2^2} = \sqrt{2697} \approx 51,9326$$

Ich berechne das „Verlängerungsverhältnis“ $\lambda = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{e}|}$ (das in Wahrheit für eine Verkürzung sorgt), mit dem \vec{e} multipliziert werden muss, um \vec{d} zu erhalten.

$$\lambda = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{e}|} = \frac{\sqrt{552,25}}{\sqrt{2697}} = 0,5$$

Damit erhalten wir:

$$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{e} = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 47 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 23,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist jedoch nicht die einzige Lösung. Auch der Vektor, der \vec{d} genau entgegengesetzt ist, ist eine Lösung. Wir erhalten also:

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 23,5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ -23,5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.11 Aufgabe 11

Gegeben sind drei Vektoren im \mathbb{R}^3 :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks zwischen den Endpunkten der Vektoren!

Lösung: Zunächst müssen zwei Kantenvektoren des Dreiecks bestimmt werden. Den Kantenvektor von der Pfeilspitze von \vec{a} zur Pfeilspitze von \vec{b} nenne ich \vec{d} , den Kantenvektor von der Pfeilspitze von \vec{a} zur Pfeilspitze von \vec{c} nenne ich \vec{e} .

$$\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 4 \\ -4 + 4 \\ -6 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = -\vec{a} + \vec{c} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2 \\ -4 + 2 \\ -6 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung eines **Parallelogramms** kann das Kreuzprodukt verwendet werden. Die gesuchte Dreiecksfläche ist dann die Hälfte davon.

$$\vec{d} \times \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-2) \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss der Betrag davon bestimmt werden:

$$|\vec{d} \times \vec{e}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$$

Die gesuchte Dreiecksfläche ist davon die Hälfte.

$$A_{\Delta} = 3 \text{ FE}$$

2.12 Aufgabe 11

Gegeben sind drei Vektoren im \mathbb{R}^2 :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks zwischen den Endpunkten der Vektoren!

Lösung: Zunächst müssen zwei Kantenvektoren des Dreiecks bestimmt werden. Den Kantenvektor von der Pfeilspitze von \vec{a} zur Pfeilspitze von \vec{b} nenne ich \vec{d} , den Kantenvektor von der Pfeilspitze von \vec{a} zur Pfeilspitze von \vec{c} nenne ich \vec{e} .

$$\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} = -\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 8 \\ -(-2) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = -\vec{a} + \vec{c} = -\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 6 \\ -(-2) + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung eines **Parallelogramms** kann das Kreuzprodukt verwendet werden. Die gesuchte Dreiecksfläche ist dann die Hälfte davon. Leider ist jedoch das Kreuzprodukt nicht im \mathbb{R}^2 sondern nur im \mathbb{R}^3 definiert. Man kann sich jedoch helfen, indem man an jeden Vektor eine dritte Dimension mit dem Wert 0 anfügt. Damit erhalte ich:

$$\vec{d}^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann das Kreuzprodukt berechnet werden:

$$\vec{d}^* \times \vec{e}^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 0 \cdot 7 \\ 0 \cdot 2 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss der Betrag davon bestimmt werden:

$$|\vec{d}^* \times \vec{e}^*| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 22^2} = 22$$

Die gesuchte Dreiecksfläche ist davon die Hälfte.

$$A_{\Delta} = 11 \text{ FE}$$